

Unidad 2 (2ª Parte): Logaritmos.

2.5 Porcentajes. Interés simple y compuesto.

2.6 Logaritmos.

2.5 Porcentajes. Interés simple y compuesto.

Los porcentajes están relacionados con la regla de tres y con la proporcionalidad directa. También con las fracciones, un porcentaje es la parte de un total, al igual que las fracciones. Nos conviene a manejar los dos instrumentos, regla de tres y fracción.

Cuando decimos que tenemos el 100% de una empresa, estamos diciendo que Si decimos que nos comimos el 50% de la pizza, quiere decir ¿Y si decimos que mi padre nos da de paga semanal un 1% de su sueldo, sabiendo que cobra 1.000 € al mes?. ¿Qué significa que mi padre va a cobrar en diciembre el 200%?

Para calcular el 4% de 625 podemos seguir dos caminos:

a) Por fracciones: $4\% \rightarrow \frac{4}{100}$, 4% de 625 $\rightarrow \frac{4}{100} \cdot 625 = \frac{4 \cdot 625}{100} = \frac{2500}{100} = 25$

b) Por regla de tres: 4% de 625 \rightarrow

625	-----	100%	$\rightarrow x = \frac{4 \cdot 625}{100} = \frac{2500}{100} = 25$
x	-----	4%	

Ejercicio 1: Calcula los siguientes porcentajes, por regla de tres y utilizando fracciones:

a) 2 % de 1440

b) 12 % de 1440

c) 40% de 1440

**a mayor % mayor cantidad*

d) 10 % de 1440

e) 100 % de 1440

f) 25 % de 624

g) 5% de 1440

h) 90 % de 1440

Ejercicio 2: Un recipiente contiene 80 kg de agua salada. El 3% del peso de esta agua es sal. ¿Qué cantidad de agua contiene el recipiente? ¿Y sal?

Ejercicio 3: Mis padres y unos amigos compraron décimos de lotería juntos. Les ha tocado 15.000 €, del premio a mis padres les tocó el 55%. ¿Cuánto cobrarán?

Ejercicio 4: Al comprar un traje de 200 € nos hicieron un descuento del 15 %. ¿Cuánto dinero pagamos por el traje?

Ejercicio 5: El 2 % de los tornillos producidos por una máquina son defectuosos. Si han salido 70 defectuosos ¿Cuántos tornillos se fabricaron?

Ejercicio 6: Un trabajador tiene un salario de 1.500 € al mes, y le aplican una subida de 4'5%. ¿Cuánto ganará el próximo mes?

Ejercicio 7: ¿Qué disolución de sal en agua es más concentrada, una que está formada por 2 g de sal en 10 g de agua o la que tiene una concentración del 1%?

Ejercicio 8: Mi paga semanal es de 10 €, la semana que viene me suben un 5%. ¿Cuánto cobraré?

Ejercicio 9: Al comprar un video juego de segunda mano, me rebajar un 60%. Sabiendo que costaba 23 €, ¿cuánto pagaremos?

Ejercicio 10: He pagado por una camisa 35'75 €, calcula el precio antes de la rebaja sabiendo que me han rebajado un 35%.

Ejercicio 11: La gasolina, en noviembre, cuesta 1'3 € el litro. En diciembre subió un 10%. Y en enero bajó un 10%, ¿cuánto cuesta en enero?

Ejercicio 12: En la tienda A venden un kilo de arroz por 1'45 €. Y en la tienda B lo venden a 1'80 €. La tienda A anuncia que el viernes pondrá el arroz en oferta con una rebaja del segundo kilo al 70%. Y la tienda B anuncia que pondrá oferta de 3x2.

Ejercicio 13: He pagado 15 € por unos pantalones, que tenían una rebaja del 25 %. ¿Cuál era su precio antes de la rebaja?

Cuando conseguimos ahorrar dinero, nos interesa sacar beneficios de él. Por ello debemos pedir información en distintas entidades financieras, para saber cuál es la que nos da mayores beneficios. A esos beneficios se les llama intereses. Hay dos tipos: simple y compuesto. ¿Cuál es la diferencia entre ellos?

Si un capital está a un **interés simple**, las ganancias se retiran y no se acumulan al capital que las ha generado. Dichos intereses se calculan teniendo en cuenta:

$I = C_i \cdot r \cdot t$ siendo C_i el capital que tengo, r el % que me conceden en forma decimal y t el tiempo en años. De forma que $C_f = C_i + I$

Ejemplo: Calcula las ganancias que nos genera un capital de 10.000 € al 5% de interés simple anual en 3 años.

$$I = C_i \cdot r \cdot t = 10.000 \times 0'05 \times 3 = 1.500 \text{ estas son las ganancias}$$

$$C_f = C_i + I = 10.000 + 1.500 = 11.500$$

Si un capital está a **interés compuesto**, al final de cada unidad de tiempo las ganancias del capital se acumulan al capital que las ha generado para producir a su vez nuevos intereses (beneficios). Dichos intereses se calculan teniendo en cuenta:

$C_f = C_i \times \left(1 + \frac{r}{100}\right)^t$ siendo C_i el capital, r el rédito % que me conceden y t el tiempo en años.

Ejemplo: Calcula las ganancias que nos genera un capital de 10.000 € al 5% de interés compuesto anual en 3 años.

$$C_f = C_i \times \left(1 + \frac{r}{100}\right)^t \rightarrow C_f = 10.000 \times (1 + 0'05)^3 = 11.576'25 \text{ €, es decir, nos aporta}$$

unos beneficios de 1.576'25 €, más que en el interés simple.

Ejercicio 14: Calcula el interés producido por un capital de 2.000 €, impuesto al 5% en 5 años:

a) si es interés simple

b) si es interés compuesto

Ejercicio 15: ¿A cuánto asciende un capital que, impuesto al 3% anual, produce 31.000 € después de tres años:

a) si es interés simple

b) si es interés compuesto

Ejercicio 16: ¿Durante cuántos años debe estar impuesto un capital de 57.000 €. Al 3% de interés simple, para producir unos intereses de 10.260 €?

A veces no nos interesa tener nuestro capital durante un año, queremos periodos de tiempo menor: meses, semanas, días, etc. En caso de que el tiempo no esté expresado en años tendremos que cambiar la fórmula. En el caso del interés simple, en la fórmula, cambiamos t por $\frac{t}{12}$, si nos dan el tiempo en meses, $\frac{t}{52}$ si nos dan el tiempo en semanas, $\frac{t}{365}$ si nos dan el tiempo en días. Para el interés compuesto queda de la siguiente forma:

a) periodo de capitalización mensual, el capital final será $C_f = C_i \cdot \left(1 + \frac{r}{1200}\right)^m$, m número de meses, r interés.

b) periodo de capitalización trimestral, el capital final será $C_f = C_i \cdot \left(1 + \frac{r}{5200}\right)^s$, s número de semanas, r interés.

c) periodo de capitalización diaria, el capital final será $C_f = C_i \cdot \left(1 + \frac{r}{36500}\right)^d$, d número de días, r interés.

Ejercicio 17: ¿A qué tipo de interés compuesto debe imponerse un capital de 925.000 € para que produzca un interés de 19.425 € en 18 meses?

Ejercicio 18: ¿A qué tipo de interés compuesto han impuesto 150.000 €, si en 38 días produjeron un interés de 1.900 €?

Ejercicio 19: ¿En cuánto se transforma un capital de 50.000 €, colocado al 12% de interés compuesto anual en 1, 2, 3, 4 y 5 años?

Ejercicio 20: Averigua en cuánto se transforma un capital de 100.000 € al 6% de interés compuesto anual durante 4 años si los periodos de capitalización son:

a) años

b) meses

c) días

d) trimestres.

Ejercicio 21: Si depositamos 1.000 € durante 80 días al 14% de interés compuesto anual, con periodo de capitalización diario. ¿En cuánto se convierte?

2.6 Logaritmos.

Definamos logaritmo: Si $a > 0$ y $a \neq 1$, se llama **logaritmo en base a** de P, y se designa por decir, $\log_a P = x \Leftrightarrow a^x = P$. Nos puede parecer una definición muy "rara", pero en realidad está relacionada con una operación muy conocida, la potencia.

$a^x = P$ en la potencia preguntamos por el resultado de un producto a.a.a...

$\sqrt[x]{P} = a$ en los radicales buscamos la base de la potencia

$\log_a P = x$ en los logaritmos vamos a buscar el exponente

Ejercicio 22: Sabemos que $7^2 = 49 \Leftrightarrow \log_7 49 = 2$. Calcula las potencias y transforma las igualdades en logaritmos, como en el ejemplo anterior:

- a) $2^5 =$
- b) $3^4 =$
- c) $5^3 =$
- d) $2^0 =$

Ejercicio 23: Calcula el exponente de las siguientes igualdades y escribe en forma de logaritmo, como en el ejercicio anterior:

- a) $10^x = 10.000$
- b) $3^x = 27$
- c) $7^x = 343$
- d) $2^x = 0,5$

Ejercicio 24: Calcula los siguientes logaritmos (sin calculadora):

a) $\log_2 8 = x \Leftrightarrow 2^x = 8 \Leftrightarrow 2^x = 2^3 \Leftrightarrow x = 3 \Leftrightarrow \log_2 8 = x$

- | | |
|-------------------|---------------------------|
| b) $\log_5 25 =$ | c) $\log_2 16 =$ |
| d) $\log_2 32 =$ | e) $\log_2 2 =$ |
| f) $\log_5 125 =$ | g) $\log_5 625 =$ |
| h) $\log_5 5 =$ | i) $\log_5 1 =$ |
| j) $\log_3 9 =$ | k) $\log_3 9 =$ |
| l) $\log_3 27 =$ | m) $\log_3 3 =$ |
| n) $\log_7 7 =$ | ñ) $\log_5 5 =$ |
| o) $\log_2 2 =$ | p) $\log_3 1 =$ |
| q) $\log_7 1 =$ | r) $\log_4 1 =$ |
| s) $\log_9 1 =$ | t) $\log_2 \frac{1}{8} =$ |

$$u) \log_5 \frac{1}{125} =$$

$$v) \log_{10} 10.000 =$$

$$w) \log_{10} 0'00001$$

$$x) \log_3 \frac{1}{27} =$$

$$y) \log_7 \frac{1}{49} =$$

$$z) \log 0 =$$

$$aa) \log(-10)$$

Para poder facilitarnos el cálculo de los logaritmos utilizaremos las siguientes **propiedades**:

$$a) \log_a (P \cdot Q) = \log_a P + \log_a Q. \text{ Por ejemplo } \log_2 (2 \cdot 4) = \log_2 2 + \log_2 4 = 1 + 2 = 3$$

$$\log_2 (2 \cdot 4) = \log_2 8 = 3$$

$$b) \log_a \frac{P}{Q} = \log_a P - \log_a Q. \text{ Por ejemplo } \log_2 (8:2) = \log_2 8 - \log_2 2 = 3 - 1 = 2$$

$$\log_2 (8:2) = \log_2 4 = 2$$

$$c) \log_a P^n = n \log_a P$$

$$d) \log_a 1 = 0$$

$$e) \log_a a = 1$$

$$f) \log_a P = \frac{\log_b P}{\log_b a} \text{ cambio de base}$$

Ejercicio 25: Sabiendo que $\log_2 A = 3$ y $\log_2 B = -1$, calcular:

$$a) \log_2 AB$$

$$b) \log_2 \frac{AB}{4}$$

$$c) \log_2 A^3$$

$$d) \log_2 \frac{A^3 B}{4}$$

$$e) \log_2 \sqrt{AB}$$

$$f) \log_2 \frac{\sqrt{AB}}{4}$$

$$g) \log_2 \frac{A}{B}$$

$$h) \log_2 \frac{16}{A}$$

$$i) \log_2 \frac{AB}{8}$$

$$j) \log_2 \sqrt{\frac{AB}{8}}$$

Ejercicio 26: Hallar con calculadora, aproximando hasta las milésimas: $\log_5 80$, $\log_{12} 100$.

Ejercicio 27: El pH de un líquido es el logaritmo de la inversa de la concentración de iones H^+ que hay en él. Por ejemplo, si la concentración de H^+ es 10^{-7} , entonces su pH es:

$\log\left(\frac{1}{10^{-7}}\right) = \log 10^7 = 7$. Calcula el pH de los líquidos que tienen las siguientes concentraciones

$$\text{de } H^+: a) 5 \cdot 10^{-5} \rightarrow$$

$$b) 3,8 \cdot 10^{-8} \rightarrow$$

$$c) 9,32 \cdot 10^{-7} \rightarrow$$

Ejercicio 28: Siendo el logaritmo de 4096 igual a 4, hallar la base correspondiente.

Ejercicio 29: Después del primer mes de vida, el crecimiento de una cierta especie de árbol responde a la ecuación: $h(t) = 12 \cdot \log_{1,5}(t) + 25$, donde h está dada en centímetros y t el tiempo en meses. ¿Cuánto mide el árbol a los 15 días de vida? ¿Cuánto mide el árbol al primer mes de vida? ¿Cuánto medirá el árbol a los 4 meses? ¿Cuánto tiempo deberá transcurrir para que el árbol alcance una altura de 2 metros?

Ejercicio 30: Si se agregan 20 gramos de sal a una cantidad de agua, la cantidad $q(t)$, de sal sin disolver, después de t segundos, está dada por: $q(t) = 20 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^t$

¿Cuánta cantidad de sal sin disolver hay después de 10 segundos? ¿En qué momento la cantidad de sal sin disolver es de 5 gramos?

Ejercicio 31: Las diferencias de presiones que se producen al ascender una montaña, son la causa que algunas personas se agoten y tengan fuertes dolores de oídos. Investigaciones científicas determinaron que la presión atmosférica está dada por la expresión: $A(x) = \left(\frac{9}{10}\right)^x$ donde x se mide en miles de metros y $A(x)$ son las atmósferas de presión. Calcular la presión a la que estoy a una altura de 3550 m. ¿A qué altura estaré si la presión es de 0,85 atmósferas?

Ejercicio 32: Halla:

a) $\log_2 16$

c) $\log_9 1$

e) $\log_4 64$

g) Lne^4

i) $\log_5 0,04$

b) $\log_2 0,25$

d) $\log_{10} 0,1$

f) $\log_7 49$

h) $\text{Lne}^{\frac{1}{4}}$

j) $\log_6 \left(\frac{1}{216}\right)$

Ejercicio 33: Aplica la propiedad 8 (cambio de base) para obtener los siguientes logaritmos con la ayuda de la calculadora:

a) $\log_2 1500$

c) $\log_{100} 200$

b) $\log_5 200$

d) $\log_{100} 40$