

Instrucciones:

- Debes copiar todos los apuntes en tu cuaderno, completando los huecos.
- Las frases que tienen un menor tamaño no es necesario que las copies. Pero si piensas que te pueden ayudar, cópialas.
- Recuerda debes trabajar individualmente. Apartado por apartado. Cuando tengas tus ideas escritas (a lápiz) en el apartado, coméntalas con tus compañeros. No avances hasta que todos los componentes tengáis las mismas respuestas. Si no llegáis a un acuerdo, preguntamos a la profesora.

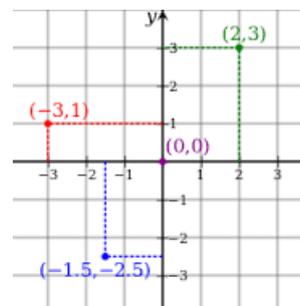
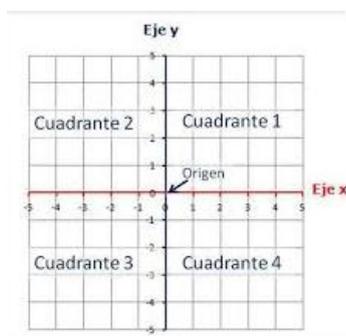
Unidades 9 y 10: FUNCIONES

9.1 Conceptos básicos de funciones.

9.2 Funciones afines.

9.1 CONCEPTOS BÁSICOS DE FUNCIONES.

Antes de comenzar es necesario recordar quién es la recta real, en ella podemos representar números reales. Pero si queremos situar un pueblo en un mapa necesitamos un plano, el plano cartesiano.



Ejercicio 1: Dibuja en el plano cartesiano los siguientes puntos en azul: $A=(3,2)$, $B=(2,5)$, $C=(-1,3)$, $D=(-3,1)$, $E=(-4,-2)$, $F=(-3,2)$, $G=(3,-2)$. En rojo representar, $H=(2,0)$, $I=(4,0)$, $J=(-2,0)$, $K=(0,3)$ y $L=(0,-3)$.

Ejercicio 2: Indica las coordenadas de los puntos representados en la siguiente figura.

Quizás sea una de las unidades más importantes. Hoy se utilizan las funciones para estudiar el comportamiento de las células cancerígenas y así tener más claro el tratamiento adecuado para el paciente. Nosotros tendremos que poner ejemplos más sencillos:

Ejercicio teórico 3: Si la base de un rectángulo es de 5 cm, escribe la ecuación (fórmula) que nos permite calcular su perímetro en función de la altura.

a) ¿Qué dos magnitudes (medidas) desconocidas se relacionan en esta situación?

b) ¿Qué ecuación representa al perímetro en función de la altura?

En lenguaje matemático utilizaremos $P(x) = 2x+10$ o bien, $y = 2x + 10$

x es la variable independiente y y v. dependiente o imagen

A $P(x)$ le llamamos **función real de variable real**. Asocia a un número real, x , otro número real $y = P(x)$, llamado imagen.

c) ¿Quién es x ? x es _____. A " x " se le llama **variable independiente**. ¿Quién es y ? y es _____. A " y " se le llama _____

_____.

d) Di ejemplos numéricos (números) _____ ¿cuántos números hay? _____

Al conjunto de todas las " x " que tienen imagen se le llama **dominio de la función**. En nuestro ejemplo del perímetro, el dominio es _____.

e) Di ejemplos numéricos (números) _____ ¿cuántos números hay? _____

Al conjunto de todas las " y " o $P(x)$ se le llama **imagen o recorrido de la función**. En nuestro caso el recorrido es _____.

f) La **gráfica de la función** está formada por todos los puntos del plano cartesiano de coordenadas $(x, P(x))$. Para representarla debes completar la siguiente tabla de valores:

x en cm	1	2	3	4	5	8
$y = 2x + 10$ en cm	12					

Una vez has completado la tabla, debes representarlos en el plano cartesiano, es decir, $(1, 12)$, $(2, _)$, ...debes dibujarlo en el plano cartesiano como has hecho en el ejercicio 1, dibújalos en color azul. Antes de dibujar ten en cuenta los valores más altos antes de dibujar. Además, en esta ocasión todos los valores son positivos por ello solo es necesario que dibujemos el primer cuadrante.

g) A mayor valor de la altura del rectángulo, ¿el perímetro será menor o mayor? _____. Por ello, en matemáticas decimos que la gráfica es **creciente**.

h) Comentamos el vídeo <https://www.youtube.com/watch?v=hkLnRAgdQ-0> sobre la pendiente de una recta. Debemos copiar la siguiente teoría en nuestro cuaderno:

Una **función lineal** es de la forma $y = m x + n$. En nuestro ejemplo es $y = 2x + 10$, donde $m = 2$ y $n = 10$. Siendo **m la pendiente**, que nos indica si la recta está más o menos inclinada. Y **n es la ordenada en el origen**, es decir, **el punto donde la recta corta al eje y**. Observa la gráfica del ejercicio 3 y comprueba que corta al eje y en el punto (0, 2). Si $m > 0$, entonces la recta (función afín) es creciente. Si $m < 0$, entonces la recta es decreciente. Recuerda a mayor valor de m, más rápido crece la recta, más inclinada está.

Ejercicio 4: Dibuja la gráfica de la función que representa al perímetro de un cuadrado, para ello sigue los siguientes pasos:

- a) ¿Qué dos magnitudes (medidas) se relacionan en este ejercicio? _____
- b) ¿Quién es la variable independiente? x es _____.
- c) ¿Quién es la variable dependiente? y o f(x) es _____.
- d) ¿Qué ecuación nos permite calcular "y" en función de "x"? $f(x) =$ _____.
- e) ¿Cuál es su dominio? _____ ¿y su recorrido? _____.
- f) Completa la siguiente tabla:

x en cm	1	2	3	4
y en cm				

- g) Representa su gráfica en el plano cartesiano del ejercicio 3 en color rojo.

Ejercicio 5: Veamos algunas diferencias y similitudes entre las gráficas del **ejercicio 3** y del **ejercicio 4**:

- a) ¿Las dos crecen igual? ____ ¿por qué? _____
- b) ¿Las dos pasan por el punto de origen (0, 0)? _____
 ¿por qué crees que la gráfica del ejercicio 3 no pasa por el (0, 0) _____

- c) ¿Qué tienen en común las dos gráficas (dibujos)? _____
- d) ¿Qué tienen en común las dos fórmulas? _____
- e) Investiga: Busca en internet función afín y función lineal (de proporcionalidad). Una función afín es de la forma _____. Una función lineal (de proporcionalidad) es de la forma _____.
- f) Para profundizar debes inventar un problema cuya ecuación sea:
 - a. Una función lineal decreciente: _____

x en °C	-5	0	4	8
y en g/ml	0,99975	0,99987	1	0,99987

- e) ¿La gráfica es una recta? _____. ¿Cómo podemos buscar la función que se adapta a dichos puntos? A dicho proceso se llama interpolación, dicho proceso es muy simple. Si la función es del tipo "parábola" será de la forma $f(x) = a x^2 + b x + c$, para calcular a, b y c necesitamos tres puntos por donde pasa la parábola, para ello vamos a utilizar $f(0)$, $f(4)$ y $f(8)$.
- f) ¿Qué herramienta has utilizado para calcular a, b y c? _____.
- g) ¿Qué tipo de funciones has visto hasta ahora? _____

 ¿A qué tipo de función corresponde la densidad? _____.
- h) ¿Cómo afecta la temperatura a la densidad del agua? _____

- i) Observa la gráfica que has dibujado en el apartado d y responde. ¿Es siempre creciente? _____. ¿Cuándo crece? _____ ¿Cuándo decrece? _____
 ¿Qué ocurre cuando $x = 4$? _____, se dice que la función tiene un **máximo en $x = 4$** . Tiene el máximo en el vértice de la parábola.
- j) En las funciones parabólicas, igual que en la función afín, hay valores especiales. Al punto $(4, 1)$ se le llama **vértice**. Si $a > 0$, el vértice es un _____ y la parábola es de la forma \cup y si $a < 0$, el vértice es un _____ y la parábola es de la forma \cap . ¿Dónde corta al eje y? _____.

TEORÍA. Si una función es de la forma $f(x) = a x^2 + b x + c$ se llama **función parabólica o parábola**. Para representarlas debemos efectuar tres pasos:

- 1) Calcular el punto de corte con el eje y \rightarrow para $x = 0 \rightarrow f(0) = c \rightarrow (0, c)$
- 2) Calcular los puntos de corte con el eje x (no siempre existen) \rightarrow Utilizaremos la fórmula de la ecuación de segundo grado, sabemos que $y = 0$, por tanto debemos resolver $a x^2 + b x + c = 0$ y normalmente obtendremos dos puntos $(x_1, 0)$ y $(x_2, 0)$.
- 3) Calcular el vértice. Es un punto muy importante de la parábola. El vértice es el punto más bajo cuando $a > 0$. Y el punto más alto cuando $a < 0$. Para calcularlo, no te olvides hacerlo, debes utilizar la siguiente fórmula $x = \frac{-b}{2a}$, y después calcular su imagen.

Observa el siguiente ejemplo: $f(x) = x^2 + 2 x - 3$ **parábola**. Para representarlas debemos efectuar tres pasos:

- i) El vértice de una parábola tiene una fórmula, ¿cuál es? _____
- j) El punto de corte de la parábola con el eje y es _____, lo calculamos haciendo _____ Los puntos de corte con el eje x son _____ y _____, lo calculamos haciendo _____ y resolviendo la ecuación de segundo grado.
- k) ¿Siempre hay dos puntos de corte con el eje x (revisa el ejercicio 9)? _____, escribe la ecuación de una parábola que no solo tenga un punto de corte: _____.
- l) ¿Cuántos kilos de tomates debe vender para obtener beneficios máximos? _____ ¿Qué nombre recibe dicho punto de la gráfica en las Matemáticas? _____
- m) ¿Qué ocurre con la gráfica cuando nos acercamos desde los 0 kilos hasta el vértice? _____ Se dice que la función es _____ ¿y cuándo vamos desde el vértice hasta los 5000 kilos? _____ Se dice que la función es _____.

Aunque en este proyecto nos queremos centrar en la estructura del agua, es necesario que estudiemos otros "tipos" de funciones:

Ejercicio 11: En biología, la mitosis es un proceso que ocurre en el núcleo de las células eucariotas (tienen un núcleo celular que contiene el ADN) y que precede inmediatamente a la división celular, consistente en el reparto equitativo del material hereditario característico, ADN. Este tipo de división ocurre en las células somáticas (células para la formación de tejidos y órganos) y normalmente concluye con la formación de dos núcleos separados para formar dos células hijas.

- a) Supongamos que cada segundo se dividen las células somáticas, completa la siguiente tabla:

x Segundo	0	1	2	3	4	5
y N° de células						

- b) Representa los puntos en el plano cartesiano. ¿Qué observas? _____
_____.
- c) ¿Quién es la variable independiente? x es _____
- d) ¿Quién es la variable dependiente? f(x) es _____
- e) ¿Quién es la función? f(x) = _____
- f) ¿Cuál es su dominio? _____ ¿Y recorrido? _____.
- g) Los valores de la imagen (número de células) _____, al aumentar el valor de x (segundos transcurridos), se dice que la función _____.
- h) ¿Qué ocurre cuando transcurren "muchos" segundos? _____

Ejercicio 12: Para el estudio de la efectividad de un antibiótico se analiza la cantidad del antibiótico en sangre en mg cada hora, obteniendo la siguiente tabla:

x tiempo en horas	0	1	2	3	5	9	19
mg de antibiótico	600	300	200	150	100	60	30

- a) Representa los puntos en el plano cartesiano. ¿Qué observas? _____
_____.
- b) ¿Quién es la variable independiente? x es _____
- c) ¿Quién es la variable dependiente? f(x) es _____
- d) ¿Quién es la función? f(x) = _____.
- e) ¿Cuál es su dominio? _____ ¿Y recorrido? _____.
- f) Los valores de la imagen (mg de antibiótico) _____, al aumentar el valor de x (horas transcurridas), se dice que la función _____.
- g) ¿Qué ocurre cuando transcurren "muchas" horas? _____

Ejercicio 13: Una empresa fabrica puzzles y los vende a diferentes jugueterías. Si la juguetería compra menos de 500 puzzles, la empresa le cobra por cada uno 5 €. Si compra 500 o más, le cobra 3 € por cada uno:

- a) Completa la siguiente tabla:

x nº de puzzles	10	100	200	500	600	700
Precio en €						

- b) Representa los puntos en el plano cartesiano. ¿Qué observas? _____
_____.
- c) ¿Quién es la variable independiente? x es _____
- d) ¿Quién es la variable dependiente? f(x) es _____
- e) ¿Quién es la función? f(x) = _____.
- f) ¿Cuál es su dominio? _____ ¿Y recorrido? _____.

Ejercicio 14: Representa las siguientes funciones, cada en un plano distinto:

a) $y = e^x$. Antes de representar, completa la tabla:

x	0	1	2	-1	-2	-3
y						

b) $y = \frac{1}{x}$. Antes de representar, completa la tabla:

x	0	1	2	-1	-2	-3
y						

c) $y = \frac{-1}{x}$. Antes de representar, completa la tabla:

x	0	1	2	-1	-2	-3
y						

d) $y = 5^x$. Antes de representar, completa la tabla:

x	0	1	2	-1	-2	-3
y						

**Explicaré en clase el cálculo de dominios fuera de un problema real mediante el ejercicio siguiente:

Ejercicio 15: Calcula el dominio de las siguientes funciones:

a) $y = 2x - 3$

b) $y = x^2 + 1$

c) $y = 5^x$

d) $y = \frac{-1}{x}$

e) $y = \frac{x-1}{3x-6}$

f) $y = \frac{x^2-1}{x^2-x-6}$

g) $y = \sqrt{x}$

h) $y = \ln(x)$

i) $y = \frac{-1}{x-5}$

j) $y = \frac{x+2}{3x}$